1 Risoluzione di un esercizio

Esercizio 1.1. Risolvere graficamente l'equazione $\ln x + x^2 - 4 = 0$, individuando un intervallo contenente la soluzione e determinando un'approssimazione della soluzione con l'utilizzo di almeno due iterazioni del metodo di bisezione.

Scriviamo l'equazione nella forma $\ln x = -x^2 + 4$. Trovare le soluzioni di questa equazione equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = -x^2 + 4 \end{cases},$$

cioè a determinare l'ascissa del punto di intersezione tra le due funzioni $y = \ln x$, $y = -x^2 + 4$. Quest'ultima funzione è una parabola di vertice $(0, 4)$; ha la concavità rivolta verso il basso ed interseca l'asse delle ascisse nei punti di coordinate $(-2, 0)$, $(2, 0)$. Disegnando in un grafico le due funzioni ci accorgiamo subito che l'intervallo $[1, 2]$ contiene l'ascissa del punto di intersezione tra le due curve. Adesso, però, dobbiamo prima di tutto dimostrare questa affermazione, cioè il fatto che l'intervallo $[1, 2]$ contiene l'ascissa del punto di intersezione tra i grafici delle due funzioni. Per far questo consideriamo la funzione $f(x) = \ln x + x^2 - 4 = \ln x - (x^2 - 4)$, ovvero la funzione "differenza" tra le due funzioni. f è continua (poiché è differenza di funzioni che sono continue) ed inoltre $f(1) = -3 < 0$ e $f(2) = \ln 2 + 4 - 4 = \ln 2 > 0$; pertanto la funzione f è continua sull'intervallo $[1, 2]$ ed assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Per il teorema degli zeri esiste un punto x^* appartenente all'intervallo aperto $]1, 2[$. La dimostrazione della prima affermazione è conclusa.

Determiniamo alcune approssimazioni, via via sempre migliori, della soluzione x^* dell'equazione assegnata, utilizzando il metodo di bisezione. Consideriamo il punto medio m dell'intervallo $[1, 2]$, $m = 3/2$ e calcoliamo $f(m)$. Si ha $f(m) = \ln(3/2) + (3/2)^2 - 4 < 0$, pertanto abbiamo le seguenti informazioni

$$\begin{array}{l} f(1) = -3 < 0 \\ f(m) = \ln(3/2) + (3/2)^2 - 4 < 0 \\ f(2) = \ln 2 > 0 \end{array}.$$

La funzione assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[m, 2]$, perciò tra l'intervallo $[1, m]$ e l'intervallo $[m, 2]$ scegliamo il secondo.

Chiamiamo m_1 il punto medio di questo intervallo. Abbiamo

$$m_1 = \frac{m+2}{2} = \frac{\frac{3}{2}+2}{2} = \frac{7}{4},$$

da cui

$$f(m_1) = \ln\left(\frac{7}{4}\right) + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 4 < 0.$$

Riassumendo, nell'intervallo $[m, 2]$ abbiamo

$$\begin{array}{l} f(m) < 0 \\ f(m_1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{array} .$$

La funzione assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[m_1, 2]$, perciò tra l'intervallo $[m, m_1]$ e l'intervallo $[m_1, 2]$ scegliamo il secondo. Sia m_2 il punto medio dell'intervallo $[m_1, 2]$. Si ha

$$m_2 = \frac{m_1+2}{2} = \frac{\frac{7}{4}+2}{2} = \frac{15}{8}.$$

L'esercizio è concluso.

Osservazione 1.1. Ad ogni passo abbiamo scelto, tra i due intervalli possibili, quello in corrispondenza del quale la funzione assume valori di segno opposto agli estremi. Facciamo questa scelta proprio perché, grazie al teorema degli zeri, siamo certi che tale intervallo contiene x^*, che è il valore che stiamo cercando di approssimare via via in modo sempre migliore. Come approssimazioni abbiamo ottenuto

$$\begin{array}{l} m = \frac{3}{2} = 1,5 \\ m_1 = \frac{7}{4} = 1,75 \\ m_2 = \frac{15}{8} = 1,875 \\ \vdots \end{array} .$$